Olympiadeklasse 6

57. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

570611

a) Die 30 Schüler der Klasse 6a laufen 15 Minuten lang Runden auf dem kleinen Sportplatz der Schule. Ein Zehntel der Schüler der Klasse schafft in dieser Zeit jeweils 15 Runden. Ein Fünftel der Schüler läuft je 12 Runden. Ein Drittel schafft je 10 Runden, und die restlichen Schüler laufen jeweils 8 Runden auf dem Sportplatz.
Wie viele Runden sind von allen Schülern zusammen insgesamt gelaufen worden?

b) In der Klasse 6b läuft die Hälfte der Schüler jeweils 10 Runden, ein Achtel der Schüler je 9 Runden, ein Viertel schafft je 8 Runden und die restlichen drei Schüler laufen jeweils 14 Runden.
Wie viele Schüler hat die Klasse 6b und wie viele Runden sind die Schüler dieser Klasse insgesamt gelaufen?

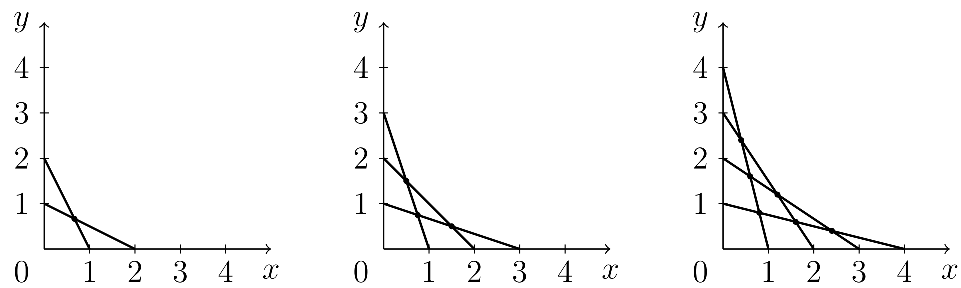
570612

Lena zeichnet Muster in Koordinatensysteme.

In der 1. Stufe zeichnet sie zwei Strecken vom Punkt $(0|1)$ zum Punkt $(2|0)$ und vom Punkt $(0|2)$ zum Punkt $(1|0)$. Die zwei Strecken schneiden sich in genau einem Punkt.

In der 2. Stufe zeichnet Lena drei Strecken von $(0|1)$ zu $(3|0)$, von $(0|2)$ zu $(2|0)$ und von $(0|3)$ zu $(1|0)$. Diese drei Strecken schneiden sich in genau drei Punkten.

In der 3. Stufe werden vier Strecken gezeichnet und so weiter (siehe Abbildungen der Stufen 1–3).



Stufe 1 Stufe 2 Stufe 3

Hinweis: Niemals verlaufen drei Strecken im Muster einer Stufe durch denselben Punkt.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

a) Zeichne die Strecken der Stufen 4, 5 und 6 in verschiedene Koordinatensysteme.

b) Wie viele Schnittpunkte haben die Strecken in den Stufen 3, 4, 5 und 6 jeweils?

c) Berechne – ohne zu zeichnen – die Anzahl der Schnittpunkte der Strecken in der 20. Stufe.

570613

Gegeben sind folgende sieben Karten, drei Zahlenkarten und vier Zeichenkarten:

7	8	9	(	)	$+$	$\cdot$

Diese sieben Karten kann man jetzt zu mathematisch sinnvollen Termen anordnen, z. B. $7 + (8 \cdot 9)$ oder $(9 + 8) \cdot 7$. Es sollen immer alle sieben Karten verwendet werden.

a) Bei welcher Anordnung der sieben Karten erhältst du das größte Ergebnis? Welche Anordnung führt zum kleinsten Ergebnis?

b) Daniel möchte eine Anordnung der sieben Karten finden, die als Ergebnis 120 hat. Er stellt fest: „Mit den vorhandenen Karten geht es nicht. Wenn ich aber nur eine Zahlenkarte gegen eine neue Karte mit einer anderen einstelligen, noch nicht vorhandenen Zahl austausche, dann geht es.“
Zeige, dass Daniel mit beiden Aussagen Recht hat.

c) Daniel möchte nun aus den vier Zeichenkarten und drei beliebigen Zahlenkarten mit einstelligen Zahlen das Ergebnis 111 erhalten.
Begründe, warum er für dieses Ergebnis keine Lösung finden kann.

Hinweis: Da Addition und Multiplikation kommutativ sind, sollen Anordnungen nicht als verschieden angesehen werden, wenn sie nur durch Vertauschung zweier Summanden oder Faktoren entstehen, wie es z. B. bei $7 + (8 \cdot 9), 7 + (9 \cdot 8), (8 \cdot 9) + 7$ und $(9 \cdot 8) + 7$ der Fall ist.

570614

Vier Lampen stehen in einer Reihe. Zu jeder Lampe gehört genau ein Schalter. Jede Bedienung eines Schalters wechselt den Zustand der zugehörigen Lampe von „aus“ nach „ein“ bzw. von „ein“ nach „aus“.

Anfangs sind alle vier Lampen aus.

Nun kommen vier Leute. Der Erste soll einen Schalter betätigen, der Zweite sieht das Ergebnis und soll zwei Schalter betätigen, der Dritte sieht wieder das bisherige Ergebnis und soll drei Schalter betätigen und der Vierte entsprechend vier.

a) Gib ein Beispiel für die Schaltvorgänge der vier Leute so an, dass am Ende alle vier Lampen leuchten.

b) Zeige, dass sich das entsprechende Problem auch für fünf Lampen, fünf Schalter und fünf Leute lösen lässt, wenn die fünf Leute wieder der Reihe nach einen, zwei, drei, vier und fünf Schalter betätigen.

c) Eine echte Herausforderung:
Das entsprechende Problem für sechs Lampen lässt sich aber nicht lösen. Begründe diese Aussage.